Towards Mathematical Sciences

Vol. 4, No. 1, Spring and Summer 2024, pp. 83–95

DOI.10.22067/tmsj.2024.88602.1058

Expository Article

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

QUADRATIC EQUATION $x^2 - x - 1 = 0$ AND LUCAS AND FIBONACCI SEQUENCES WITH EMPHASIS ON SEQUENCES IN SCHOOL TEXTBOOKS

HOJATOLLAH LAELI DASTJERDI*

Department of Mathematics Education, Farhangian University, PO Box 889-14665, Tehran, Iran
h.laeli@cfu.ac.ir

Abstract. In this article, we will examine some points related to sequences in school textbooks. By examining the school and university textbooks, it can be seen that the sequences are presented in the textbooks very briefly, which has caused students to face problems in the university. Because there are many topics such as limit, continuity, derivative and integral, existence of limit or continuity or not of some functions, and even other topics in discrete mathematics or geometry books to know the concept and characteristics of sequences. In addition, there are many sequences, each of which, depending on whether they are convergent or divergent, have interesting features that can be useful for teaching. In this article, considering the roots of an equation in the second dimension, we will introduce and examine the Lucas and Fibonacci sequences. In the following, we will discuss the characteristics of this biped and check their relationship with each other.

2020 Mathematics Subject Classification. 97C30,97C70, 97D60.

Keywords. Equation, sequence, Lucas, Fibonacci, Matrix.

Date: Rceived 21-6-2024 Revised 13-8-2024 Accepted 24-9-2024 Available Online 26-9-2024

دوره ۴، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۳، صص. ۸۳–۹۵
DOI. 10.22067/tmsj.2024.88602.1058
مقاله علمی–ترویجی
https://tmsj.um.ac.ir

معادله درجه دوم $x^2 - x - 1 = 0$ و دنباله‌های لوکاس وفیبوناچی با تأکید بر دنباله‌ها در کتب درسی مدرسه

حجت اله لعلی دستجردی*

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی۸۸۹-۱۴۶۶۵، تهران، ایران
h.laeli@cfu.ac.ir

چکیده. در این مقاله به بررسی برخی نکات مربوط به دنباله‌ها در کتب درسی مدرسه می‌پردازیم. با بررسی کتاب‌های درسی مدرسه و دانشگاه مشاهده می‌شود که دنباله‌ها در کتاب‌های درسی به‌طور خیلی خلاصه ارائه شده‌اند که این باعث شده است در ادامه و در دانشگاه، دانشجویان با مشکل روبرو شوند، چراکه مباحث زیادی مانند حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال، وجود حد یا پیوسته بودن یا نبودن بعضی از توابع و حتی مباحث دیگری چه در کتاب‌های ریاضیات گسسته و یا هندسه به دانستن مفهوم و ویژگی‌های دنباله‌ها بستگی دارد. علاوه بر این دنباله‌های زیادی وجود دارند که هرکدام با توجه به این‌که همگرا یا واگرا باشند ویژگی‌های جالبی دارند که می‌توانند برای آموزش مفید باشند. در این مقاله با توجه به ریشه‌های یک معادله درجه دوم به معرفی و بررسی دو دنباله لوکاس و فیبوناچی می‌پردازیم. در ادامه به ویژگی‌های این دو دنباله پرداخته و ارتباط آن‌ها با یکدیگر را بررسی می‌کنیم.

۱. پیشگفتار

یکی از مباحث مهم در ریاضیات بحث دنباله‌هاست. اعداد طبیعی، اعداد اول و... مثال‌هایی از دنباله‌ها هستند. آشنایی با دنباله‌ها برای دانش‌آموزان از ابتدای تحصیل در نظر گرفته‌شده است. با نگاهی به کتاب‌های

2010 Mathematics Subject Classification. 97C30,97C70, 97D60.

واژگان کلیدی. معادله، دنباله، لوکاس، فیبوناچی، ماتریس.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۳/۴/۱ بازنگری ۱۴۰۳/۵/۲۳ پذیرش ۱۴۰۳/۷/۳ انتشار برخط ۱۴۰۳/۷/۵

نحوه ارجاع به این مقاله: ح. دستجردی، معادله درجه دوم $x^2 - x - 1 = 0$ ودنباله های لوکاس وفیبوناچی با تاکید بر دنباله ها درکتب درسی مدرسه، به سوی علوم ریاضی، ۴ (۱۴۰۳)، شماره ۱، ۸۳–۹۵.

درسی جدید و قدیم به نظر می‌رسد که باید توجه بیشتری به این مبحث صورت گیرد. چراکه پایه و اساس خیلی از مطالب در ریاضیات، دنباله‌هاست. در ادامه به بررسی بعضی از مفاهیمی که در کتاب‌های درسی در مورد دنباله‌ها آمده است می‌پردازیم.

در کتاب ریاضیات گسسته دوره پیش‌دانشگاهی رشته ریاضی [۱] چاپ ۱۳۹۰ و در صفحه ۲۷ در قسمت استقرای ریاضی مثالی به‌صورت زیر ارائه‌شده است:

چند جمله‌ی اول دنباله‌ای موسوم به دنباله‌ی لوکا عبارتند از

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots.$$

اگر جمله nام را با L_n نمایش دهیم، این دنباله با رابطه به‌اصطلاح بازگشتی

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \qquad n \geq 3,$$

و شرایط اولیه $L_2 = 3, L_1 = 1$ به دست می‌آید. با استفاده از اصل استقرای قوی ریاضی ثابت می‌کنیم که به ازای هر عدد طبیعی n

$$L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

این مثال یک مثال کاملاً انتزاعی و ارائه آن بدون هیچ مقدمه و هیچ شناختی می‌تواند باعث بی‌انگیزگی دانش‌آموزان شود. البته این مثال در سال‌های بعد از کتاب درسی مدرسه حذف‌شده است. ذکر این نکته مهم است که جمله اول این دنباله عدد ۲ است که در کتاب درسی نوشته‌نشده است. نکته قابل‌تأمل این است که با نگاهی به کتاب‌های درسی مدرسه ملاحظه می‌شود که فقط درس سوم از فصل اول ریاضی دهم [۴] و فصل اول حسابان ۱ [۳] به دنباله‌ها اختصاص داده‌شده است. در ابتدا به تعریف الگو و سپس تعریف دنباله پرداخته‌شده است و در ادامه نیز دنباله حسابی و هندسی معرفی‌شده‌اند. البته یکی از بدفهمی‌هایی که در این درس برای دانش‌آموزان ممکن است اتفاق بیافتد، تعریف دنباله خطی است که در صفحه ۱۶ کتاب ریاضی دهم تعریف‌شده و عبارت an در تعریف الگوی خطی است که با موارد a_n در صفحات بعدی مثل ۱۹، ۱۴ و ۲۰ بدفهمی ایجاد می‌شود. در شکل ۱ an و در شکل‌های ۲ و ۳ a_n داده‌شده است. یکی دیگر از مواردی که در کتاب حساب، دیفرانسیل و انتگرال [۴] چاپ ۱۳۹۴ وجود داشت، تعریف حد با استفاده از دنباله‌ها است. در شکل‌های ۴ و ۵ تعریف حد با استفاده از دنباله‌ها نمایش داده‌شده است. همان‌طور که اشاره شد، این قسمت‌ها نیز در کتاب‌های جدید وجود ندارند. همچنین در این کتاب و در صفحه ۴۵، شکل ۶، دنباله‌ای که به‌عنوان یک دنباله‌ی مهم عدد نپر را معرفی می‌کند نیز در کتاب‌های جدید حذف‌شده است. در این مقاله به بررسی مشخصات دنباله لوکاس حذف‌شده از کتاب و دنباله فیبوناچی با استفاده از یک چندجمله‌ای درجه‌دو می‌پردازیم. همچنین ارتباط این دو دنباله را باهم بررسی می‌کنیم.

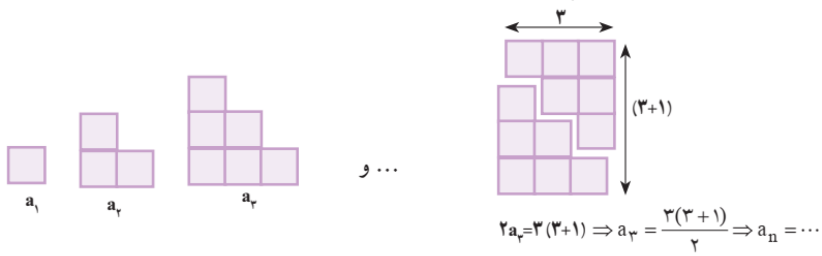
به‌طور کلی الگوهایی را که جملهٔ عمومی آنها به‌صورت $t_n=an+b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جملهٔ عمومی $t_n=an+b$، میزان تغییر جملات متوالی برابر a بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جملهٔ متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب n است.
به‌عنوان مثال در یک الگوی خطی با جملهٔ عمومی $t_n=-۴n+۱۵$، هر جمله نسبت به جملهٔ قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

$۱۱, ۷, ۳, -۱, -۵, -۹, \ldots$

شکل ۱: تعریف دنباله خطی در صفحه ۱۹ ریاضی دهم

پ) شکل‌های الگوی صفحه قبل را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم. با دقت در تصویر زیر سعی کنید حاصل a_n را بر حسب n به‌دست آورید.



شکل ۲: سؤال مربوط به صفحه ۲۰

در ادامه مقاله موارد زیر را خواهیم داشت: در بخش ۲، معادله‌های لوکاس و فیبوناچی معرفی خواهند شد. در بخش ۳، روابط ماتریسی بین این دو دنباله ارائه خواهد شد. در قسمت ۴، نتیجه‌گیری مقاله را خواهیم داشت.

۲. معادله درجه دوم $x^2-x-1=0$ و دنباله‌های لوکاس و فیبوناچی

همان‌طور که می‌دانیم در کتاب ریاضی سال دهم، حل معادله درجه دوم آمده است و مطالب ارائه‌شده در این مقاله برای دانش‌آموز متوسطه سال دهم، به‌طور کامل قابل‌فهم بوده و فقط در پایان از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه استفاده‌شده است. در این صورت این مطالب می‌تواند به‌عنوان موضوعات پیشنهادی در کتب درسی مدرسه‌ای گنجانده شود.

معادله درجه دوم

$$x^2-x-1=0 \qquad (۱.۲)$$

n :شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
a_n :تعداد چوب‌کبریت‌ها	۵	۸	۱۱	...	...	...	...
رابطه بین n و a_n	$a_1=۵$	$a_2=۸$	$a_3=۱۱$	...	...	$a_n=...$	...

به‌عنوان مثال ملاحظه می‌شود که، «تعداد چوب کبریت‌های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به‌طور خلاصه به‌صورت $a_1=۵$ نشان داده‌ایم (می‌خوانیم : a اندیس ۱ برابر ۵). عبارت‌های a_1، a_2 و a_3 متغیرهای اندیس‌دار[۱] نامیده می‌شوند که مقادیر آنها به‌ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می‌شود. پس در واقع، عدد ۵ جملهٔ اول الگوست؛ ۸ جملهٔ دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.

a_1	a_2	a_3
۵	۸	۱۱

الف) با این نمادگذاری، a_4 نشان‌دهندهٔ چیست و مقدار آن چقدر است؟

ب) a_n به چه معناست؟

پ) آیا می‌توانید حاصل a_n را بر حسب n به‌دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

شکل ۳: سؤال مربوط به صفحه ۱۴

تعریف: فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و $f: D \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت، گوییم حد تابع f در a، عدد حقیقی L است و می‌نویسیم، $\lim_{x\to a} f(x) = L$، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنهٔ f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست $(a_n \neq a)$، دنباله $\{f(a_n)\}$ به L همگرا باشد.

شکل ۴: تعریف صفحه ۷۱ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش‌دانشگاهی سال ۱۳۹۴

تعریف ۱: فرض کنیم تابع D زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و $f: D\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت، گوییم حد تابع f در a، $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ که همگرا به a است و $x_n \neq a$، $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$

شکل ۵: تعریف صفحه ۱۰۶ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش‌دانشگاهی سال ۱۳۹۴

را در نظر بگیرید. این معادله دارای دو ریشه

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

۱ـ۸ـ یک دنبالهٔ مهم

دنباله زیر را درنظر می‌گیریم $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}_{n=1}^{\infty} : 2, (\frac{3}{2})^2, (\frac{4}{3})^3, (\frac{5}{4})^4, (\frac{6}{5})^5, \ldots$

این دنباله هم به لحاظ کاربردی و همچنین از جنبه نظری اهمیت فوق‌العاده دارد. چرا؟ ثابت می‌شود این دنباله همگراست و هرگاه حد آن را e بنامیم، یعنی

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

عدد حقیقی e به‌صورتی طبیعی، در بیشتر پدیده‌های خلقت ظاهر می‌شود. دو دسته از مهم‌ترین پدیده‌ها فرایندهای رشد و زوال هستند. در اولی کمیت مورد مطالعه (نسبت به زمان) رشد می‌کند و در پدیده دوم کمیت مورد بحث رو به زوال دارد. برای مثال: وقتی تعداد اندکی باکتری را در محیطی مناسب قرار می‌دهیم، به شدت رشد کرده و پس از زمان اندکی تعداد آنها ۲، ۳ و یا صد برابر می‌شود. در حالی‌که هرگاه مقداری ماده رادیواکتیویته مانند فلزهای اورانیوم، پلوتونیوم، و یا انشتانیوم را داشته باشیم، پس از مدتی مقدار آن کاهش یافته، یعنی بخشی از ماده زوال یافته و به عناصر دیگری مبدل می‌گردد. عدد e در چنین پدیده‌هایی نقشی اساسی دارد، به‌گونه‌ای که در محاسبات مربوط به رشد و زوال به‌صورتی طبیعی بروز می‌کند. e در اقتصاد نیز مطرح می‌شود. از این بابت لگاریتمی که پایه آن عدد e باشد **لگاریتم طبیعی** نامیده می‌شود.

شکل ۶: معرفی یک دنباله مهم در صفحه ۴۵

است. چون α ریشه معادله (۱.۲) است، در این صورت در معادله صدق می‌کند و خواهیم داشت:

$$\alpha^2 = 1 + \alpha. \tag{۲.۲}$$

حال با توجه به اینکه $\alpha^3 = \alpha^2\alpha$ و با استفاده از رابطه (۲.۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\alpha^3 &= \alpha^2\alpha \\ &= (1+\alpha)\alpha \\ &= \alpha + \alpha^2 \\ &= \alpha + (1+\alpha) = 1 + 2\alpha.\end{aligned} \tag{۳.۲}$$

با ادامه این روش می‌توان نشان داد که

$$\alpha^4 = 2 + 3\alpha, \qquad \alpha^5 = 3 + 5\alpha. \tag{۴.۲}$$

با در نظر گرفتن موارد به‌دست‌آمده

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 + \alpha, \\ \alpha^2 &= 1 + \alpha, \\ \alpha^3 &= 1 + 2\alpha, \\ \alpha^4 &= 2 + 3\alpha, \\ \alpha^5 &= 3 + 5\alpha, \end{aligned} \tag{۵.۲}$$

به دنبال پیدا کردن الگوی موردنظر هستیم. برای پیدا کردن الگو به ازای n و این‌که α^n به چه صورت خواهد بود، به معرفی دنباله فیبوناچی می‌پردازیم. این دنباله به‌صورت زیر است:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots .$$

رابطه بازگشتی این دنباله به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \qquad n \geq 0. \end{aligned} \tag{۶.۲}$$

این دنباله دارای ویژگی‌های بسیار جالبی است که در بسیاری از منابع بررسی‌شده است. برای پیدا کردن رابطه‌ای برای α^n، فرض می‌کنیم

$$\alpha^n = p + q\alpha. \tag{۷.۲}$$

حال با در نظر گرفتن و مقایسه دو رابطه (۵.۲) و (۷.۲) مشاهده می‌شود که عدد ۲ در α^4، همان F_3 است و ضریب α نیز F_4 است. به همین صورت در α^5 عدد ۳ مقدار F_4 است و ضریب α برابر F_5 است. پس با توجه به نکات گفته‌شده خواهیم داشت:

$$p = F_{n-1}, \qquad q = F_n.$$

در این صورت داریم:

$$\alpha^n = F_{n-1} + F_n\alpha, \qquad n \geq 1. \tag{۸.۲}$$

با روشی مشابه، برای ریشه دوم معادله نیز خواهیم داشت:

$$\beta^n = F_{n-1} + F_n\beta, \qquad n \geq 1. \tag{۹.۲}$$

حال اگر روابط (۸.۲) و (۹.۲) را از هم کم کنیم خواهیم داشت:

$$\alpha^n - \beta^n = F_n(\alpha - \beta). \tag{۱۰.۲}$$

در این صورت دنباله F_n عبارت است از

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right). \tag{۱۱.۲}$$

حال می‌خواهیم مقدار

$$\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta}, \tag{۱۲.۲}$$

را که خود دنباله‌ی جدیدی است، مشخص کنیم. می‌دانیم که $\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1$.

اگر فرض کنیم

$$L_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} = \alpha^n + \beta^n. \tag{۱۳.۲}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&L_0 = 2,\\
&L_1 = 1,\\
&L_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta = 3,\\
&L_3 = \alpha^3 + \beta^3 = 4,\\
&L_4 = 7,\\
&\ \vdots
\end{aligned} \tag{۱۴.۲}$$

در این صورت رابطه بازگشتی زیر را برای این دنباله تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
L_0 &= 2,\\
L_1 &= 1,\\
L_{n+2} &= L_{n+1} + L_n, \qquad n \geq 1.
\end{aligned} \tag{۱۵.۲}$$

این دنباله را دنباله لوکاس[۱] می‌نامیم. البته رابطه (۱۵.۲) را می‌توان به‌صورت زیر نیز اثبات کرد:

[۱] Lucas

$$\begin{aligned} L_{n+1} + L_n &= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + \alpha^n + \beta^n, \\ &= \alpha^n(\alpha+1) + \beta^n(\beta+1), \\ &= \alpha^n\alpha^2 + \beta^n\beta^2, \\ &= \alpha^{n+2} + \beta^{n+2}, \\ &= L_{n+2}, \qquad n \geq 1. \end{aligned} \tag{۱۶.۲}$$

که در این رابطه به دلیل این‌که α و β ریشه‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ است، خواهیم داشت:

$$\alpha^2 = \alpha + 1, \qquad \beta^2 = \beta + 1.$$

همچنین اگر معادله تفاضلی

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \qquad n \geq 1, \tag{۱۷.۲}$$

را در نظر بگیریم، این معادله دارای معادله مشخصه زیر است:

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{۱۸.۲}$$

که دارای دو ریشه α و β است. پس جواب عمومی رابطه بازگشتی (۱۷.۲) به‌صورت زیر است:

$$L_{n+2} = c_1\alpha^n + c_2\beta^n, \qquad n \geq 1. \tag{۱۹.۲}$$

که با در نظر گرفتن

$$L_0 = 2, \qquad L_1 = 1,$$

ضرایب $c_1 = 1$ و $c_2 = 1$ به دست می‌آید. پس نتیجه زیر را برای دو دنباله لوکاس و فیبوناچی به‌صورت زیر خواهیم داشت که فرمول‌های باینت[۲] نامیده می‌شوند:

$$\begin{aligned} L_n &= \alpha^n + \beta^n, \\ F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}. \end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

---

[۲] Binet

در ادامه به معرفی بعضی از روابط جالب بین دنباله لوکاس و فیبوناچی به‌صورت زیر می‌پردازیم[۸، ۷]:

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n-1} + F_{n+1} = 2F_{n+1} - F_n, \\ F_{2n} &= L_n F_n, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{F_n} &= \sqrt{5}. \end{aligned} \tag{۲۱.۲}$$

یکی دیگر از روابطی که برای هر دو دنباله وجود دارد رابطه‌ی کزینی[۳] به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} &= 5(-1)^n, \\ F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= (-1)^n. \end{aligned} \tag{۲۲.۲}$$

روابط جالب دیگری وجود دارد که خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای مطالعه به منابع [۵، ۶] مراجعه کند.

۳. ارتباط ماتریسی دنباله‌های لوکاس و فیبوناچی

در ادامه به بررسی ماتریسی دنباله‌های فیبوناچی و لوکاس می‌پردازیم. روابط زیر را برای دو دنباله فیبوناچی و لوکاس داریم:

$$\begin{aligned} F_{n+1} + F_{n-1} &= L_n, \\ L_{n-1} + L_{n+1} &= 5F_n. \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{۲.۳}$$

رابطه (۱.۳) را به‌صورت معادله‌های ماتریسی زیر خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} \tag{۳.۳}$$

---

[۳] Cassini

یا

$$5\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{۴.۳}$$

حال قضیه زیر را برای Q^n به‌صورت زیر داریم.

قضیه ۱.۳. *فرض‌کنید Q ماتریس تعریف‌شده در (۲.۳) باشد. در این صورت*

$$Q^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}}\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} & \text{اگر } n \text{ زوج،} \\ \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} & \text{اگر } n \text{ فرد،} \end{cases}$$

در ادامه با استفاده از Q^n، فرمول‌هایی که مشهور به فرمول‌های باینت هستند را با استفاده از روش ماتریسی به دست می‌آوریم [۷].

قضیه ۲.۳. *فرض‌کنید n عدد طبیعی باشد. در این صورت روابط زیر را خواهیم داشت:*

$$L_n = \alpha^n + \beta^n,$$
$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}. \tag{۵.۳}$$

اثبات. ماتریس Q را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای مشخصه این ماتریس عبارت است از

$$\lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0.$$

در این صورت مقادیر ویژه این ماتریس عبارت است از

$$\lambda_1 = \sqrt{5}\alpha, \qquad \lambda_2 = \sqrt{5}\beta.$$

بردارهای ویژه متناظر با این دو مقدار ویژه نیز عبارتند از

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \end{bmatrix} \tag{۶.۳}$$

و

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha \end{bmatrix} \tag{۷.۳}$$

که V_1 بردار ویژه متناظر با λ_1 و V_2 بردار ویژه متناظر با λ_2 هست و $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. در این صورت ماتریس Q قطری شدنی است و می‌توان نوشت:

$$V = U^{-1}QU$$

که در آن

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}$$

و

$$V = \begin{bmatrix} \sqrt{5}\alpha & 0 \\ 0 & \sqrt{5}\beta \end{bmatrix}.$$

با توجه به ویژگی‌های ماتریس‌های متشابه داریم:

$$V^n = U^{-1}Q^nU, \qquad Q^n = UV^nU^{-1}.$$

پس داریم:

$$Q^n = 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} + (-\beta)^{n+1} & \alpha^n - (-\beta)^n \\ \alpha^n - (-\beta)^n & \alpha^{n-1} + (-\beta)^{n-1} \end{bmatrix}.$$

□

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله به معرفی یک معادله درجه‌دو و ارتباط آن با دنباله‌های لوکاس و فیبوناچی پرداختیم. در کتب درسی متوسطه به‌طور خیلی خلاصه به این مفهوم پرداخته‌شده است. در صورتی که می‌توان با اختصاص مفاهیم بیشتر و با توجه به ساده بودن و کاربردی بودن آن در تعریف حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال دانش‌آموزان را در دوره متوسطه با این مفاهیم آشنا نمود.

مراجع

[۱] ریاضیات گسسته دوره پیش دانشگاهی (کد کتاب ۲۹۶/۱)، *سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران*، چاپ هفدهم، ۱۳۹۰.

[۲] ریاضی (۱) ـ پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه، ۱۱۰۲۱۱، *سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی*، چاپ هشتم، ۱۴۰۲.

[۳] حسابان (۱) ـ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه، ۱۱۱۲۱۱، *سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی*، چاپ هفتم، ۱۴۰۲.

[۴] حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی (کد کتاب۲۹۵/۱)، *سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی*، چاپ چهارم، ۱۳۹۴.

[5] G. Bilgici, *New generalizations of Fibonacci and Lucas sequences*, Appl. Math. Sci. **8** (2014) 1429–1437.

[6] V. E. Hoggatt , *Fibonacci and Lucas Numbers,* Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.

[7] F. Kohen and D. Bozkurt, *On lucas numbers by the matrix method*, Hacet. J. Math. Stat., **39** (2010) 471–475.

[8] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, Interscience, New York, 2001.